フロッケ理論と量子物質の制御

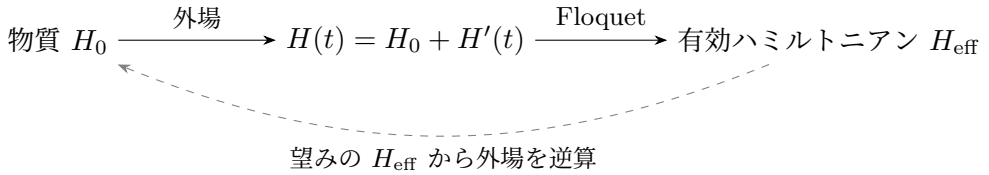
横浜国大 集中講義 板書ノート

岡 隆史

3　高周波展開とフロッケ・エンジニアリング

前回，周期駆動系の発展は $U(t) = P(t)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}H_F t}$ と書けることを見た．今回は，外場によって H_F を設計するという考え方（フロッケ・エンジニアリング）を扱う．振動数 Ω が大きいとき，H_F は $1/\Omega$ の展開で系統的に求まる．これは擬エネルギー Brillouin ゾーンの**中心**の物理である．

3.1　考え方　〔5 分〕



Sambe 空間では，層 m と $m \pm 1$ は Ω だけエネルギーが離れている．Ω がバンド幅 W や層間の結合 $\|H_{m\neq 0}\|$ より十分大きければ，層は互いに分離し，層間の結合は摂動として消去できる．結果として各層に同じ有効ハミルトニアン H_{eff} が残る．

3.2　高周波展開　〔20 分〕

時間に依存するユニタリ変換

$|\Psi\rangle = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}K(t)}\left|\tilde{\Psi}\right\rangle$ とすると，$\left|\tilde{\Psi}\right\rangle$ は次のハミルトニアンに従う：

$$\tilde{H} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}K} H \mathrm{e}^{-\mathrm{i}K} - \mathrm{i}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}K}\partial_t \mathrm{e}^{-\mathrm{i}K} = H + \mathrm{i}[K, H] - \partial_t K - \frac{\mathrm{i}}{2}[K, \partial_t K] + \cdots .$$

方針：周期的な $K(t)$ をうまく選び，$\tilde{H}$ から時間依存性を消す．残ったものが H_{eff} である．

$1/\Omega$ で逐次解く

$H(t) = H_0 + V(t)$, $V(t) = \sum_{m\neq 0} H_m \mathrm{e}^{-\mathrm{i}m\Omega t}$ と分ける．$K = K^{(1)} + K^{(2)} + \cdots$, $K^{(n)} = O(\Omega^{-n})$ とおく．時間微分は Ω を一つ出すので $\partial_t K^{(n)} = O(\Omega^{-(n-1)})$.

- $O(\Omega^0)$：$\tilde{H} = H_0 + V(t) - \partial_t K^{(1)}$．振動部分を消すには $\partial_t K^{(1)} = V(t)$．よって

$$K^{(1)}(t) = \mathrm{i}\sum_{m\neq 0} \frac{H_m}{m\Omega}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}m\Omega t}, \qquad H_{\mathrm{eff}}^{(0)} = H_0 \text{ (時間平均)}.$$

- $O(\Omega^{-1})$：$\tilde{H} \ni \mathrm{i}[K^{(1)}, H_0] + \frac{\mathrm{i}}{2}[K^{(1)}, V] - \partial_t K^{(2)}$．振動部分は $K^{(2)}$ で消し，時間平均が $H_{\mathrm{eff}}^{(1)}$ になる．第 1 項の平均は 0．第 2 項は

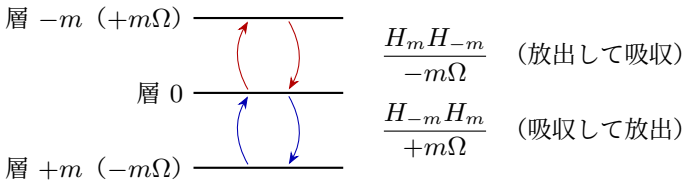
$$\frac{\mathrm{i}}{2}\sum_{m\neq 0}\frac{\mathrm{i}}{m\Omega}[H_m, H_{-m}] = \sum_{m>0}\frac{[H_{-m}, H_m]}{m\Omega}.$$

$$\boxed{H_{\mathrm{eff}} = H_0 + \sum_{m>0} \frac{[H_{-m}, H_m]}{m\Omega} + O(\Omega^{-2}), \qquad K(t) = \mathrm{i} \sum_{m\neq 0} \frac{H_m}{m\Omega} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}m\Omega t} + O(\Omega^{-2}).}$$

これを van Vleck 展開（高周波展開）と呼ぶ．前回の記号では $U(t, t_0) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}K(t)} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}H_{\mathrm{eff}}(t-t_0)} \mathrm{e}^{\mathrm{i}K(t_0)}$ である．

描像

$1/\Omega$ の項は Sambe 空間の 2 次摂動である．m 光子を吸収して放出する過程と，放出して吸収する過程の差：



光子は実際には吸収されない（仮想過程）．交換子になるので，H_m と H_{-m} が可換なら $1/\Omega$ の項は消える．

次の次数

［省略可］　$H(t) = H_0 + V\cos\Omega t$ のように $[H_{-1}, H_1] = 0$ の場合，最初の補正は $1/\Omega^2$：

$$H_{\mathrm{eff}} = H_0 + \frac{[[V, H_0], V]}{4\Omega^2} + \cdots .$$

$H_0 = p^2/2m$，$V = V(x)$ なら $[[V, H_0], V] = (V')^2/m$ で，有効ポテンシャル $(V'(x))^2/4m\Omega^2$ が現れる．これは Kapitza の倒立振り子や Paul トラップの原理であり，ミクロモーションの運動エネルギーに等しい．

展開の流儀

	得られるもの	時刻原点 t_0
van Vleck	H_{eff} と $K(t)$	依存しない
Floquet–Magnus	$H_F[t_0] = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}K(t_0)} H_{\mathrm{eff}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}K(t_0)}$	依存する（$[H_m, H_0]\mathrm{e}^{-\mathrm{i}m\Omega t_0}/m\Omega$ の項）
Brillouin–Wigner	Sambe 空間の $m = 0$ 層への射影	依存しない

スペクトルは同じ次数まで一致する．対称性の議論には t_0 に依らない H_{eff} を使うのが安全である．

キック演算子の意味

実験室系の状態は $|\Psi(t)\rangle = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}K(t)} \left|\tilde{\Psi}(t)\right\rangle$ である．

- 物理量：$\langle O\rangle(t) = \left\langle \tilde{\Psi} \middle| \mathrm{e}^{\mathrm{i}K(t)} O\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}K(t)} \middle| \tilde{\Psi} \right\rangle = \left\langle \tilde{\Psi} \middle| O + \mathrm{i}[K(t), O] + \cdots \middle| \tilde{\Psi} \right\rangle$．$H_{\mathrm{eff}}$ の固有状態にあっても，$O(1/\Omega)$ の振動（ミクロモーション）が乗る．
- 初期状態：外場を突然入れると $\left|\tilde{\Psi}(0)\right\rangle = \mathrm{e}^{\mathrm{i}K(0)} |\Psi(0)\rangle$ で，元の状態から $O(1/\Omega)$ ずれる．ゆっくり入れれば，H_0 の固有状態は H_{eff} の固有状態に断熱的につながる．

3.3　例 1：動的局在　〔10 分〕

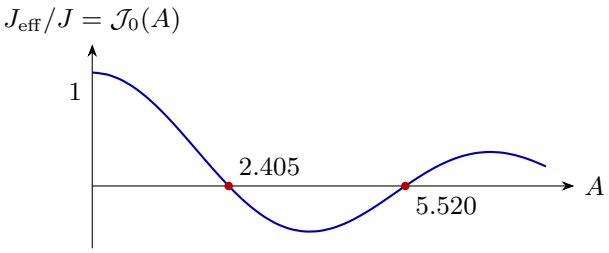
1 次元の強束縛模型 $\epsilon(k) = -2J\cos k$（格子定数 1）に一様な交流電場をかける．ベクトルポテンシャルは波数をずらす：$k \to k + A(t)$，$A(t) = A\sin\Omega t$（$A = E_0/\Omega$）．

$$H(t) = \sum_k \epsilon\big(k + A\sin\Omega t\big)\, c_k^\dagger c_k .$$

Jacobi–Anger の公式 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}A\sin\Omega t} = \sum_n \mathcal{J}_n(A)\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\Omega t}$（$\mathcal{J}_n$ は Bessel 関数）から，時間平均は

$$\boxed{H_0 = \sum_k \big[-2J_{\mathrm{eff}}\cos k\big] c_k^\dagger c_k, \qquad J_{\mathrm{eff}} = J\,\mathcal{J}_0(A).}$$

- 異なる時刻の $H(t)$ が可換なので，$H_F = H_0$ は**厳密**である（補正はない）．
- $\mathcal{J}_0(A) = 0$（$A = 2.405, 5.520, \ldots$）でバンド幅が 0 になり，波束は広がらない：**動的局在**（Dunlap–Kenkre 1986）．
- $2.4 < A < 5.5$ では $J_{\mathrm{eff}} < 0$：バンドが上下反転する．



描像

波数が $k(t) = k + A\sin\Omega t$ と振動し，粒子はバンドを 1 周期で往復する．H_F はその平均である．前回の自由電子（放物線分散）では平均しても定数がずれるだけだったが，cos バンドでは幅が変わる．

3.4　例 2：円偏光下の 2 次元 Dirac 粒子　〔25 分〕

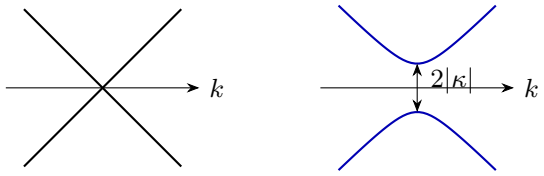
グラフェンの Dirac 点近傍 $H = v\,\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{k}$ に円偏光 $\boldsymbol{A}(t) = A(\cos\Omega t, \sin\Omega t)$ を照射する：

$$H(t) = v\,\boldsymbol{\sigma}\cdot\big(\boldsymbol{k} + \boldsymbol{A}(t)\big) = v\,\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{k} + vA\big(\sigma_+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\Omega t} + \sigma_-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Omega t}\big), \qquad \sigma_\pm = \frac{\sigma_x \pm \mathrm{i}\sigma_y}{2}.$$

したがって $H_1 = vA\,\sigma_+$，$H_{-1} = vA\,\sigma_-$．$[\sigma_-, \sigma_+] = -\sigma_z$ より

$$\boxed{H_{\mathrm{eff}} = v\,\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{k} + \kappa\,\sigma_z, \qquad \kappa = -\frac{(vA)^2}{\Omega}, \qquad \varepsilon_\pm(\boldsymbol{k}) = \pm\sqrt{v^2k^2 + \kappa^2}.}$$

- Dirac 点に**ギャップ** $2|\kappa|$ が開く．円偏光の向きを逆にすると κ の符号が反転する．
- 直線偏光では $[H_{-1}, H_1] = 0$ で，この次数ではギャップは開かない．円偏光は時間反転対称性を破るので σ_z の質量項が許される．
- 大きさ：$|\kappa| = (evE/\Omega)^2/\hbar\Omega$．$v = 10^6\,\mathrm{m/s}$，$\hbar\Omega = 0.19\,\mathrm{eV}$，$E = 10^7\,\mathrm{V/m}$ で $2|\kappa| \approx 13\,\mathrm{meV}$．



外場なし　　円偏光

トポロジーの復習

2 バンド系 $H(\boldsymbol{k}) = \boldsymbol{d}(\boldsymbol{k}) \cdot \boldsymbol{\sigma}$ の下のバンドの Chern 数は，$\hat{\boldsymbol{d}} = \boldsymbol{d}/|\boldsymbol{d}|$ が球面を覆う回数：

$$C = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathrm{BZ}} d^2k \; \hat{\boldsymbol{d}} \cdot \left(\partial_{k_x} \hat{\boldsymbol{d}} \times \partial_{k_y} \hat{\boldsymbol{d}} \right) \in \mathbb{Z}, \qquad \sigma_{xy} = C \frac{e^2}{h}.$$

バルク・エッジ対応：ギャップの中に，端に局在したカイラル（一方向）モードが $|C|$ 本現れる．質量 κ の Dirac 粒子 1 個は半整数 $C = \frac{1}{2}\,\mathrm{sgn}(\kappa)$ を与える（谷 τ の Dirac 粒子では $\frac{1}{2}\tau\,\mathrm{sgn}(\kappa_\tau)$）．全体の符号は，電荷と向きの規約による．

ハニカム格子：Haldane 模型

グラフェンには二つの谷 $\tau = \pm 1$ がある：$H_\tau = v(\tau k_x \sigma_x + k_y \sigma_y)$．同じ計算で

$$\kappa_\tau = -\tau \, \frac{(vA)^2}{\Omega}.$$

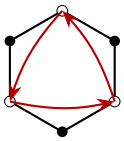
質量の符号が谷で逆になる．副格子ポテンシャル（両方の谷で同符号，$C = 0$）と違い，二つの谷の Hall 伝導度が**足し合わさり**

$$\boxed{C = \pm 1 \qquad \text{(符号は円偏光の向き)}.}$$

これは Haldane 模型（1988）の実現である．

格子の上で見る

ハニカム格子（最近接距離 1，ホッピング J，ボンドの向き $\varphi_j = \varphi_1 + 2\pi(j-1)/3$）では，ボンド j のホッピングが Peierls 位相 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}A\cos(\Omega t - \varphi_j)} = \sum_m \mathrm{i}^m \mathcal{J}_m(A)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}m(\Omega t - \varphi_j)}$ を得る．



黒線：最近接 $J\mathcal{J}_0(A)$
赤矢印：次近接 $+\mathrm{i}t_2$（逆向きは $-\mathrm{i}t_2$）

- 0 次：$J \to J\mathcal{J}_0(A)$（動的局在と同じ）．
- $1/\Omega$：A→B→A′ と 2 回跳び，途中で m 光子を仮想的に吸収・放出する過程．二つのボンドの位相差 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}m(\varphi_j - \varphi_{j'})}$ が残り，吸収と放出の順序の差をとると，**虚数**の次近接ホッピング $\pm\mathrm{i}t_2$ になる．符号は六角形を回る向きで決まる．
- $A \ll 1$ で $t_2 \simeq \sqrt{3}J^2A^2/4\Omega$．K 点の質量 $3\sqrt{3}\,t_2 = 9J^2A^2/4\Omega$ は，$v = 3J/2$ とした Dirac 粒子の結果 $|\kappa| = (vA)^2/\Omega$ と一致する．

光で時間反転対称性を破り，磁場なしで量子 Hall 状態を作る：**フロッケ・トポロジカル絶縁体**（Oka–Aoki 2009，Kitagawa ら 2011）．冷却原子（Jotzu ら 2014）で Haldane 模型が実現され，グラフェンで光誘起異常 Hall 効果が観測された（McIver ら 2020）．

注意：占有

平衡系では下のバンドが満たされ，$\sigma_{xy} = Ce^2/h$ となる．周期駆動系では，Floquet バンドの占有 $f_\alpha(\boldsymbol{k})$ が平衡分布になるとは限らない：

$$\sigma_{xy} = \frac{e^2}{h}\int \frac{d^2k}{2\pi}\sum_\alpha f_\alpha(\boldsymbol{k})\,\mathcal{F}_\alpha(\boldsymbol{k}) \qquad (\mathcal{F}_\alpha:\ \text{Floquet バンドの Berry 曲率}).$$

量子化するのは f が一方のバンドだけを満たすときである．実験で観測される Hall 応答には，バンドのトポロジーに加えて占有の偏りも寄与する．

3.5　例 3：光子介助トンネルと人工ゲージ場　〔10 分〕

エネルギー差 Ω のある 2 サイトを，位相 φ の変調で共鳴的に駆動する：

$$H(t) = -J\big(c_1^\dagger c_2 + \text{h.c.}\big) + \big[\Omega + V_{\rm ac}\cos(\Omega t + \varphi)\big]n_2.$$

エネルギー差が大きいので，このままでは高周波展開は使えない．まず回転系 $R(t) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\chi(t)n_2}$，$\chi(t) = \Omega t + \frac{V_{\rm ac}}{\Omega}\sin(\Omega t + \varphi)$ に移ってサイトエネルギーを消すと

$$\tilde{H}(t) = -J\big(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\chi(t)}c_1^\dagger c_2 + \text{h.c.}\big), \qquad \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\chi(t)} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\Omega t}\sum_n \mathcal{J}_n\big(\tfrac{V_{\rm ac}}{\Omega}\big)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n(\Omega t+\varphi)}.$$

時間平均には $n = -1$ の項だけが残る：

$$\boxed{|J_{\rm eff}| = J\,\mathcal{J}_1\big(\tfrac{V_{\rm ac}}{\Omega}\big), \qquad \arg J_{\rm eff} = \varphi\ (+\text{定数}).}$$

- 駆動がなければ（$V_{\rm ac} = 0$）トンネルは止まっている．1 光子をもらって初めて跳べる：**光子介助トンネル**.
- ホッピングの位相が，駆動の位相 φ で決まる．φ を場所ごとに変えれば，プラケットを一周したときの位相の和が 0 でなくなる：**人工磁束**．中性原子で Harper–Hofstadter 模型が実現された（Aidelsburger ら，Miyake ら 2013）.
- 手順の教訓：共鳴があっても，先に回転系に移れば高周波展開が使える（強相関系の Floquet–Schrieffer–Wolff 変換も同じ考え方）.

3.6　多体系への拡張　〔5 分〕

同じ考え方は相互作用系にも使える．半充填 Hubbard 模型（$U \gg J$）に交流電場をかけると，交換相互作用が

$$J_{\rm ex} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{4J^2\,\mathcal{J}_n(A)^2}{U - n\Omega}$$

に変わる（n 光子を伴う仮想的な二重占有）．Ω と A で大きさも符号も制御できる．円偏光なら，スピンのスカラーカイラリティ項 $\boldsymbol{S}_i\cdot(\boldsymbol{S}_j\times\boldsymbol{S}_k)$ が誘起される．

3.7　展開の限界　〔10 分〕

収束しない

相互作用する多体系では，高周波展開は一般に**漸近展開**である．n 次の項は n とともにいったん小さくなり，$n_* \sim \Omega/J$ を超えると増大する．n_* 次で打ち切った $H_{\rm eff}^{(n_*)}$ の誤差は $\mathrm{e}^{-O(\Omega/J)}$.

加熱

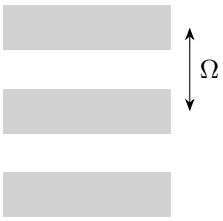
孤立した非可積分系は外場からエネルギーを吸収し続け，最終的には無限温度の状態に至る．ただし 1 光子 Ω を吸収するには $\sim \Omega/J$ 個の局所自由度を同時に組み替える必要があり，加熱は指数関数的に遅い：

$$\boxed{\tau_{\rm heat} \gtrsim \mathrm{e}^{\,O(\Omega/J)}.}$$

$t \ll \tau_{\rm heat}$ では $H_{\rm eff}^{(n_*)}$ がほぼ保存し，系はそのもとでの準平衡状態（**プレサーマル状態**）にある．フロッケ・エンジニアリングが意味をもつのはこの時間窓である．

周波数を下げると

$\Omega < W$ になると Sambe 空間の層が重なり，層の間で**実際の**光子吸収（共鳴）が起こる．$1/\Omega$ 展開は使えない．



$\Omega > W$：層は分離

$\Omega < W$：層が重なる（共鳴）

高周波展開が破綻する領域は，単に「近似が悪い」だけではない．共鳴が擬エネルギー BZ の**境界**にギャップを開け，平衡系には存在しないトポロジカル相が現れる（次回）.

3.8　まとめ　〔5 分〕

$H_{\rm eff} = H_0 + \sum_{m>0}[H_{-m}, H_m]/m\Omega + \cdots$．外場の対称性（偏光・位相）が $H_{\rm eff}$ の対称性を決める．

設計する量	外場	仕組み
バンド幅	直線偏光	$J \to J\mathcal{J}_0(A)$
バンドのトポロジー	円偏光	$[H_{-1}, H_1] \to$ 質量項（虚数の次近接ホッピング）
人工磁場	位相のずれた共鳴駆動	光子介助トンネルの位相
交換相互作用	交流電場	仮想二重占有のエネルギー分母 $U - n\Omega$
閉じ込めポテンシャル	非一様な振動場	ミクロモーションの運動エネルギー

展開は漸近的で，加熱時間 $\mathrm{e}^{O(\Omega/J)}$ より短い時間窓で有効である．$\Omega < W$ では共鳴が起こる．