# フロッケ理論と量子物質の制御

横浜国大 集中講義 板書ノート

岡 隆史

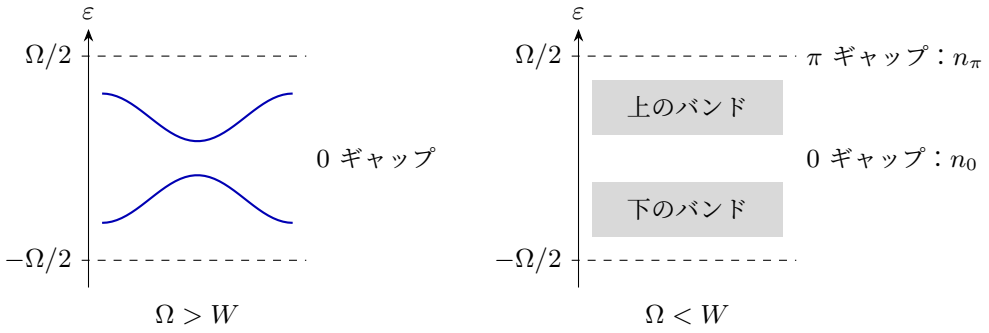
## 4　フロッケ・トポロジカル相 (1)：Chern 数の先へ

前回は高周波の極限で，$H_{\mathrm{eff}}$ のトポロジーが平衡系と同じ言葉（Chern 数）で語れることを見た．今回は周波数を下げ，擬エネルギー Brillouin ゾーンの**境界**に進む．そこでは「$H_F$ のトポロジーだけではエッジ状態が決まらない」という，平衡系にない事態が起こる．三つの例でそれを確かめる．

### 4.1　周波数を下げる：二種類のギャップ　〔15 分〕

2 バンド系 $E_\pm(\boldsymbol{k})$ を考える．Sambe 空間のスペクトルは $E_\pm(\boldsymbol{k}) - m\Omega$ の繰り返しである．

- $\Omega > W$（バンド幅）：コピーは重ならない．ギャップは $\varepsilon = 0$ のまわりにある．
- $\Omega < W$：層 $m$ の上のバンドと層 $m-1$ の下のバンドが，$E_+(\boldsymbol{k}) - E_-(\boldsymbol{k}) = \Omega$ を満たす $\boldsymbol{k}$ で交差する（1 光子共鳴）．$H_{\pm 1}$ がそこに準位反発を起こし，$\varepsilon = \pm\Omega/2$ に新しいギャップが開く．




ギャップは 2 種類ある：$\varepsilon = 0$ の **0 ギャップ**と，$\varepsilon = \Omega/2$（$\varepsilon T = \pi$）の $\pi$ **ギャップ**．$\varepsilon = +\Omega/2$ と $-\Omega/2$ は同じ点なので，$\pi$ ギャップは一つである．エッジ状態はどちらのギャップにも現れうる．

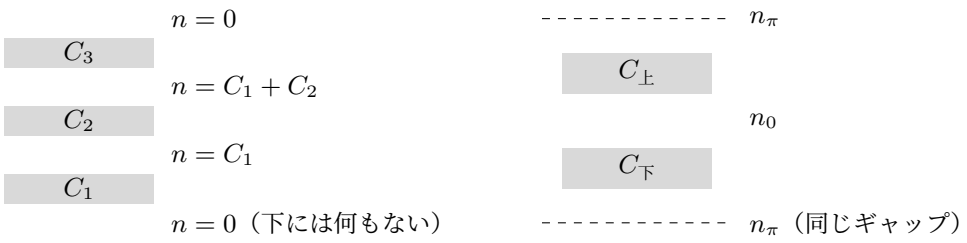
**エッジ状態の数え方**

$n_g$ をギャップ $g$ を横切るカイラルエッジモードの本数（向きを符号にとる）とする．スペクトルの流れの議論から，

$$\text{バンドの Chern 数} = n_{\text{上のギャップ}} - n_{\text{下のギャップ}}.$$

（磁束を 1 本通すと，Chern 数 $C$ のバンドから $C$ 個の状態が一方の端へ運ばれる．その分だけ，バンドの上下のギャップを横切るエッジモードの数に差がなければならない．）

- **平衡系**：スペクトルに下限がある．最低バンドの下には状態がなく $n = 0$．したがって Chern 数がわかれば，すべてのギャップの $n_g$ が決まる．
- **周期駆動系**：擬エネルギーは周期的で，「最低バンド」がない．数え始める基準がない．




平衡系：下から順に決まる　　周期駆動系：一周して元に戻る

2 バンドなら

$$\boxed{C_{\text{上}} = n_\pi - n_0, \qquad C_{\text{下}} = n_0 - n_\pi.}$$

$(n_0, n_\pi)$ は独立な二つの整数で，Chern 数はその**差**しか決めない．

実際，ハニカム格子に円偏光をかけて $\Omega$ を $W$ より下げていくと，$\pi$ ギャップにもカイラルエッジ状態が現れ，バンドの Chern 数は高周波のときの $\pm1$ から変わる．

$n_0 = n_\pi \neq 0$ なら，すべてのバンドの Chern 数が 0 なのにカイラルエッジ状態がある：**異常フロッケ・トポロジカル絶縁体**．$H_F$ のバンドをいくら調べてもわからない．

## 4.2　例 1：擬エネルギーが巻き付くバンド（Thouless ポンプ）

〔15 分〕

1 次元格子（単位胞の長さを 1 とする）で，パラメータを周期 $T$ でゆっくり一巡させる．例として Rice–Mele 模型

$$H(t) = \sum_i \big[J + \delta(-1)^i \sin\Omega t\big]\big(c_i^\dagger c_{i+1} + \text{h.c.}\big) + \sum_i \Delta(-1)^i \cos\Omega t\; c_i^\dagger c_i$$

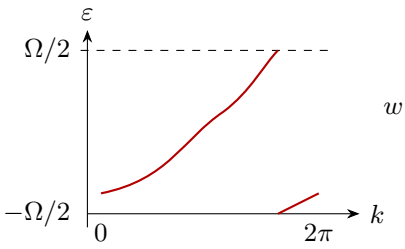
を念頭におく（交互のホッピングと交互のポテンシャルを，位相をずらして変調する）．Floquet バンド $\varepsilon_\alpha(k)$ について，第 2 回の Hellmann–Feynman の定理から $\partial_k \varepsilon_\alpha$ は 1 周期で平均した速度である．バンド $\alpha$ を満たした状態（Wannier 状態）が 1 周期に進む距離は

$$\Delta x = \int_0^{2\pi} \frac{dk}{2\pi}\, T\, \frac{\partial \varepsilon_\alpha}{\partial k} = \frac{T}{2\pi}\big[\varepsilon_\alpha(2\pi) - \varepsilon_\alpha(0)\big].$$

$k = 0$ と $2\pi$ は同じ点だが，擬エネルギーは $\Omega$ の整数倍だけずれてよい：$\varepsilon_\alpha(2\pi) = \varepsilon_\alpha(0) + w\,\Omega$.

$$\boxed{\Delta x = w, \qquad w = \frac{1}{\Omega}\oint dk\, \frac{\partial \varepsilon_\alpha}{\partial k} \in \mathbb{Z}.}$$

**1 周期に運ばれる単位胞の数 ＝ 擬エネルギーが Floquet BZ を巻く回数．**




$w = 1$：BZ を一周で $\Omega$ だけ上がる

- 断熱極限では $\varepsilon_\alpha = \overline{E_\alpha} - \gamma_\alpha(k)/T$，$\gamma_\alpha(k) = \int_0^T dt\, \mathcal{A}_t$，$\mathcal{A}_\mu = \langle u_\alpha | \mathrm{i}\partial_\mu | u_\alpha \rangle$．動的位相の部分は $k$ について周期的なので，巻き付きは幾何学的位相が担う：

$$w = -\frac{1}{2\pi}\oint dk\, \partial_k \gamma_\alpha = -\frac{1}{2\pi}\int dk\, dt\, \big(\partial_k \mathcal{A}_t - \partial_t \mathcal{A}_k\big) = -C_\alpha.$$

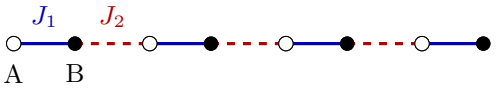
（$\partial_t \mathcal{A}_k$ の項は $t$ の周期性から消える．）$C_\alpha$ は $(k,t)$ トーラス上の Chern 数である（Thouless 1983）．

- 静的な格子では，$k$ について周期的で連続な $E(k)$ は必ず上りと下りを同数もつ．単独のカイラル分散は存在できない．擬エネルギーが周期的だからこそ可能になる．
- ただし $\sum_\alpha w_\alpha = 0$（$\det U(k,T)$ の位相は巻かない）．巻き付くバンドは逆向きのものと対で現れる．
- 有限の $\Omega$ では，逆向きに巻くバンドとの交差点に指数関数的に小さいギャップが開く．ポンプの量子化は断熱極限でのみ厳密である．

「単独で巻き付くカイラルな擬エネルギーバンド」は，1 次元格子単体では対でしか現れない．2 次元の異常相では，これが**一方の端に単独で**現れる．

## 4.3　例 2：0 モードと $\pi$ モード（駆動された SSH 鎖）　〔25 分〕

副格子 A, B をもつ鎖で，セル内のボンドとセル間のボンドを交互にオンにする：




前半 $T/2$：$J_1$ のみ，後半 $T/2$：$J_2$ のみ

$$H_1 = J_1\sigma_x, \qquad H_2(k) = J_2\big(\cos k\,\sigma_x + \sin k\,\sigma_y\big), \qquad U(k,T) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta_2 \hat{\boldsymbol{n}}_k\cdot\boldsymbol{\sigma}}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta_1\sigma_x}, \quad \theta_i = \frac{J_i T}{2}.$$

$\frac{1}{2}\operatorname{Tr} U = \cos \varepsilon T$ から

$$\boxed{\cos\varepsilon(k)T = \cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2\cos k.}$$

$k=0$ で $\varepsilon T = \pm(\theta_1+\theta_2)$，$k=\pi$ で $\varepsilon T = \pm(\theta_1-\theta_2)$．したがって

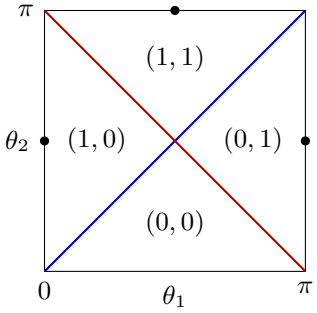
$$0 \text{ ギャップが閉じる：}\ \theta_1 \pm \theta_2 \in 2\pi\mathbb{Z}, \qquad \pi \text{ ギャップが閉じる：}\ \theta_1 \pm \theta_2 \in (2\mathbb{Z}+1)\pi.$$

### 厳密に解ける三つの点

（$\theta = \pi/2$ は隣のサイトへの完全移動，$\theta = \pi$ は全体に $-1$）

| $(\theta_1,\theta_2)$ | 左端で起こること | 端のモード |
|---|---|---|
| $(0,\frac{\pi}{2})$ | 左端の A は相手がなく，何も起きない：$U=+1$ | $\varepsilon = 0$（通常の SSH） |
| $(\pi,\frac{\pi}{2})$ | 前半で全サイトに $-1$．後半は上と同じ：$U=-1$ | $\varepsilon T = \pi$ |
| $(\frac{\pi}{2},\pi)$ | 端のセルで $U=\sigma_z(-\mathrm{i}\sigma_x)=\sigma_y$，固有値 $\pm1$ | 0 と $\pi$ の両方 |

バルクはどの点でも $\varepsilon T = \pm\pi/2$ でギャップが開いている．




$\theta_1 = \theta_2$：0 ギャップが閉じる

$\theta_1 + \theta_2 = \pi$：$\pi$ ギャップが閉じる

数字は一つの端あたりの $(n_0, n_\pi)$

**なぜ 0 と $\pi$ か**

この模型にはカイラル対称性 $\Gamma = \sigma_z$，$\Gamma H_i \Gamma = -H_i$ がある．時刻原点を各ステップの中点にとると $\Gamma U(T)\Gamma = U(T)^{-1}$．固有値 $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varepsilon T}$ の状態 $|\psi\rangle$ に対し $\Gamma|\psi\rangle$ は固有値 $\mathrm{e}^{+\mathrm{i}\varepsilon T}$ をもつ：擬エネルギーは $\varepsilon \leftrightarrow -\varepsilon$ の対で現れる．自分自身と対になれるのは $\varepsilon = 0$ と $\varepsilon = \Omega/2$ $(\equiv -\Omega/2)$ の二つだけである．この二つの擬エネルギーにある端状態は，対称性を保つ摂動では動けない．平衡系では $E = 0$ だけだが，周期駆動系では保護される点が二つある．

**不変量**

対称な時刻原点（前半の中点・後半の中点）から測った 1 周期の発展を

$$U' = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}H_1 T/4}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}H_2 T/2}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}H_1 T/4}, \qquad U'' = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}H_2 T/4}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}H_1 T/2}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}H_2 T/4}$$

とする．対応する $H_F', H_F''$ はカイラル対称で，$\begin{pmatrix} 0 & q^* \\ q & 0 \end{pmatrix}$ の形をもつ．巻き付き数を $\nu[q] = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \oint dk\, \partial_k \ln q(k)$ とすると

$$\boxed{\nu_0 = \frac{\nu' + \nu''}{2}, \qquad \nu_\pi = \frac{\nu'' - \nu'}{2} \qquad \text{(Asbóth ら 2014).}}$$

三つの点で確かめる（$\hat{\boldsymbol{n}}_k = (\cos k, \sin k, 0)$）：

| $(\theta_1, \theta_2)$ | $H_F' T$ | $H_F'' T$ | $\nu'$ | $\nu''$ | $(\nu_0, \nu_\pi)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $(0, \frac{\pi}{2})$ | $\frac{\pi}{2}\hat{\boldsymbol{n}}_k \cdot \boldsymbol{\sigma}$ | $\frac{\pi}{2}\hat{\boldsymbol{n}}_k \cdot \boldsymbol{\sigma}$ | 1 | 1 | $(1, 0)$ |
| $(\pi, \frac{\pi}{2})$ | $-\frac{\pi}{2}\hat{\boldsymbol{n}}_{-k} \cdot \boldsymbol{\sigma}$ | $-\frac{\pi}{2}\hat{\boldsymbol{n}}_k \cdot \boldsymbol{\sigma}$ | $-1$ | 1 | $(0, 1)$ |
| $(\frac{\pi}{2}, \pi)$ | $-\frac{\pi}{2}\sigma_x$ | $-\frac{\pi}{2}\hat{\boldsymbol{n}}_{2k} \cdot \boldsymbol{\sigma}$ | 0 | 2 | $(1, 1)$ |

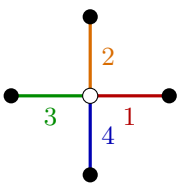
$H_F'$ だけ，あるいは $H_F''$ だけでは二つの数は決まらない．二つの時刻原点を比べることが，周期の中の情報を使うことに当たる．

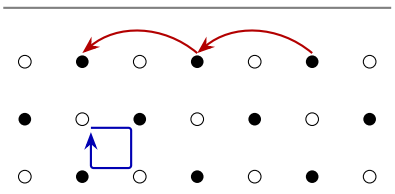
**$\pi$ モードの意味**

$U(T)|\pi\rangle = -|\pi\rangle$：1 周期では元に戻らず，$2T$ で戻る．0 モードと $\pi$ モードの重ね合わせは $|\psi(nT)\rangle = a|0\rangle + (-1)^n b|\pi\rangle$ となり，周期 $2T$ で振動する（周期倍化）．超伝導体では $\pi$ Majorana モード，多体系では離散時間結晶につながる．振動磁場中の Dirac 電子では，$\varepsilon = \Omega/2$ に平坦な Landau 準位（$\pi$-Landau level）が現れる．

## 4.4　例 3：RLBL 模型　〔25 分〕

Rudner–Lindner–Berg–Levin（2013）の模型．正方格子（格子定数 $a$）を副格子 A（白），B（黒）に分ける．A サイトから出る 4 本のボンドに 1–4 の番号を付け，1 周期を 4 等分して順番に一つずつオンにする．



端：1 周期に 2 サイト進む

バルク：プラケットを一周

### 完全移動の条件

A サイト $\boldsymbol{r}$ とボンド $n$ でつながる B サイトを $\boldsymbol{r}+\boldsymbol{b}_n$ とする（$\boldsymbol{b}_1=-\boldsymbol{b}_3=(a,0)$，$\boldsymbol{b}_2=-\boldsymbol{b}_4=(0,a)$）．ステップ $n$ のハミルトニアンは

$$H_n(\boldsymbol{k})=-J\big(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{b}_n}\sigma_+ + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{b}_n}\sigma_-\big), \qquad U(\boldsymbol{k},T)=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}H_4T/4}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}H_3T/4}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}H_2T/4}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}H_1T/4}.$$

ここで $\sigma_+ = |\mathrm{A}\rangle\langle\mathrm{B}|$．各ステップで $J\cdot T/4=\pi/2$ にとる．オンになったボンドの 2 サイトで $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}H\,T/4}=\mathrm{i}\sigma_x$：粒子は確率 1 で隣に移る．

### バルク

A サイトの粒子は $\boldsymbol{r}\to\boldsymbol{r}+\boldsymbol{b}_1\to\boldsymbol{r}+\boldsymbol{b}_1-\boldsymbol{b}_2\to\boldsymbol{r}-\boldsymbol{b}_2\to\boldsymbol{r}$ とプラケットを一周して元に戻る．位相は $\mathrm{i}^4=1$．B サイトも同様．

$$\boxed{U_{\mathrm{bulk}}(T)=1 \quad\Longrightarrow\quad H_F=0.}$$

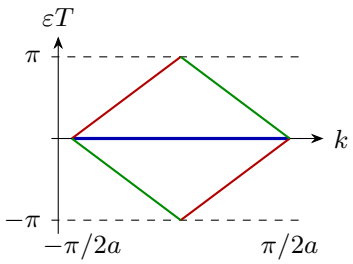
バンドは完全に平坦で $\varepsilon=0$ に縮退し，Chern 数はすべて 0．ストロボ的には「何も起きていない」．このときミクロモーション演算子は時間発展そのもので，$P(\boldsymbol{k},t)=U(\boldsymbol{k},t)$，$P(\boldsymbol{k},0)=P(\boldsymbol{k},T)=1$．単位元から出て単位元に戻る，ユニタリ行列の**ループ**である．

### 端

端では 4 本のうち外向きのボンドがない．一方の副格子の粒子は，2 ステップが空振りになり，残りの 2 ステップで端に沿って 2 サイト（1 単位胞）進む．上端の B サイトなら：ステップ 1 で左へ，2 は相手がなく空振り，3 で左へ，4 は空振り．もう一方の副格子は内側のプラケットを一周して戻る．端に沿った波数 $k$ の状態は 1 周期で位相 $\mathrm{e}^{\mp 2\mathrm{i}ka}$ を得るので

$$\boxed{\varepsilon_{\mathrm{edge}}(k)\,T=\pm 2ka+\text{定数}\pmod{2\pi}, \qquad -\frac{\pi}{2a}<k\le\frac{\pi}{2a}.}$$

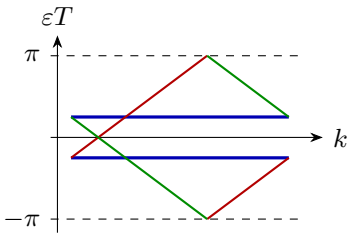
端の BZ を一周すると擬エネルギーがちょうど一巻きする．例 1 の $w=\pm1$ のバンドそのものである．上端と下端で向きは逆．




青：バルク（平坦，$\varepsilon=0$）
赤・緑：上端・下端のカイラルモード

### 安定性

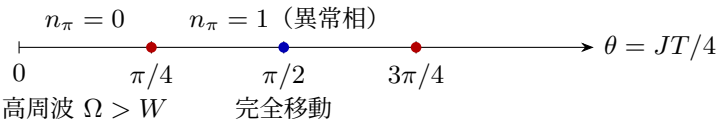
5 番目のステップとして副格子ポテンシャル $\pm\Delta$ を加えると，バルクのバンドは $\varepsilon\neq0$ に分かれ，0 ギャップと $\pi$ ギャップの両方が開く．エッジモードは両方のギャップを横切る：$(n_0,n_\pi)=(1,1)$，$C=0$．完全移動の条件からずらしても，ギャップが閉じない限りエッジモードは残る．




副格子ポテンシャルあり：バルクは $\varepsilon \neq 0$ の 2 本のバンド
エッジモードは 0 ギャップと $\pi$ ギャップの両方を横切る
各バンドに上から 1 本入り，下へ 1 本出る：$C = 1 - 1 = 0$

**周波数との関係**

$\theta \equiv JT/4 = \pi J/2\Omega$ を変える（副格子ポテンシャルなし）．時間平均したハミルトニアンのバンド幅は $W = 2J$．$\boldsymbol{k} = 0$ では $H_n$ がすべて可換で $\varepsilon T = \pm 4\theta$ なので，$\pi$ ギャップは $\theta = \pi/4$，すなわち $\Omega = W$ で閉じる．




完全移動の点は異常相の中心にある．「$\Omega < W$ で $\pi$ ギャップに新しい物理が現れる」ことの具体例になっている．

RLBL 模型では $H_F = 0$ で，ストロボ的な発展には何の情報もない．カイラルエッジ状態を決めているのは，1 周期の中で粒子が**どちら向きに回るか**，すなわちミクロモーション $P(\boldsymbol{k}, t)$ である．

## 4.5　まとめ

〔5 分〕

| | 例 1：ポンプ | 例 2：駆動 SSH 鎖 | 例 3：RLBL 模型 |
|---|---|---|---|
| 次元・対称性 | 1 次元，なし | 1 次元，カイラル | 2 次元，なし |
| 平衡系にない点 | $\varepsilon(k)$ が巻き付く | $\pi$ モード | $C = 0$ でカイラルエッジ |
| 不変量 | $w$ | $(\nu_0, \nu_\pi)$ | $(n_0, n_\pi)$ |
| $H_F$ でわかるか | — | 片方の組合せだけ | わからない（$H_F = 0$） |

- 周期駆動系には 0 ギャップと $\pi$ ギャップがあり，エッジ状態の数 $(n_0, n_\pi)$ は独立である．Chern 数は差 $n_\pi - n_0$ しか与えない．
- 擬エネルギーの巻き付き，$\pi$ モード，$H_F = 0$ でのカイラルエッジ状態は，いずれも平衡系に対応物がない．
- 次回：ミクロモーションのトポロジーを数える不変量を導入し，全体を整理する．