フロッケ理論と量子物質の制御

横浜国大 集中講義 板書ノート

岡 隆史

5　フロッケ・トポロジカル相 (2)：異常相の整理

前回，エッジ状態の数 (n_0, n_π) は H_F だけでは決まらず，1 周期の中の運動（ミクロモーション）が情報を担うことを例で見た．今回はそれを数える不変量を導入し，フロッケ・トポロジカル相の全体を整理する．最後に，異常相をバルクで見分ける物理量を議論する．

5.1　何を数えるか

〔10 分〕

- 平衡系のデータ：ギャップのある $H(\boldsymbol{k})$．占有バンドへの射影 $P(\boldsymbol{k})$ から Chern 数が決まる．
- 周期駆動系のデータ：$U(\boldsymbol{k}, t)$，$0 \le t \le T$．単位元から $U(\boldsymbol{k}, T)$ に至る**ユニタリ行列の経路**．擬エネルギー ε にギャップがあるとする．

困る点：$U(\boldsymbol{k}, t)$ は t について周期的でない（$U(T) \neq 1$）．$(\boldsymbol{k}, t)$ の空間が閉じていないと，巻き付きを数えられない．

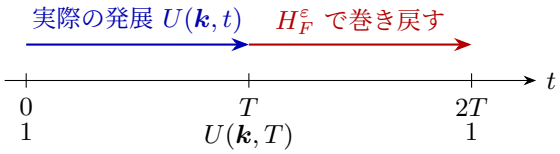
巻き戻し

ギャップ ε に分岐切断を置いた Floquet ハミルトニアンを

$$H_F^{\varepsilon}(\boldsymbol{k}) = \frac{\mathrm{i}}{T} \log_{\varepsilon} U(\boldsymbol{k}, T) \qquad (\text{擬エネルギーを } \varepsilon < \varepsilon_\alpha < \varepsilon + \Omega \text{ にとる})$$

とし，$t = T$ のあと H_F^{ε} で逆向きに発展させて単位元に戻す：

$$U_{\varepsilon}(\boldsymbol{k}, t) = \begin{cases} U(\boldsymbol{k}, t) & 0 \le t \le T \\ \mathrm{e}^{-\mathrm{i} H_F^{\varepsilon}(\boldsymbol{k})\,(2T - t)} & T \le t \le 2T \end{cases} \qquad U_{\varepsilon}(\boldsymbol{k}, 0) = U_{\varepsilon}(\boldsymbol{k}, 2T) = 1.$$



U_{ε} は k_x, k_y, t のすべてについて周期的で，3 次元トーラスからユニタリ群への写像 $T^3 \to U(N)$ になる．これは分岐 ε でのミクロモーション $P_{\varepsilon}(\boldsymbol{k}, t) = U(\boldsymbol{k}, t)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i} H_F^{\varepsilon} t}$ と連続変形でつながり，同じ情報をもつ．

第 2 回の「対数の分岐の任意性」がここで効く．ギャップごとに別の H_F^{ε} と別のミクロモーション P_{ε} があり，ギャップごとに不変量が定まる．

5.2　巻き付き数　〔20 分〕

定義

$$\boxed{W[U_\varepsilon] = \frac{1}{8\pi^2}\int_0^{2T} dt \int_{\mathrm{BZ}} d^2k\ \mathrm{Tr}\Big(U_\varepsilon^{-1}\partial_t U_\varepsilon \left[U_\varepsilon^{-1}\partial_{k_x}U_\varepsilon,\ U_\varepsilon^{-1}\partial_{k_y}U_\varepsilon\right]\Big) \in \mathbb{Z}.}$$

写像 $T^3 \to U(N)$ の巻き付き数である（$\pi_3(U(N)) = \mathbb{Z}$）．ギャップを閉じない連続変形では変わらない．1 次元の巻き付き数 $\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint dt\, U^{-1}\partial_t U$（例：$U = \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}nt/T}$ は $U(1)$ を n 回巻く）の 3 次元版にあたる．

バルク・エッジ対応

（Rudner ら 2013）

$$\boxed{n_\varepsilon = W[U_\varepsilon] \qquad (\text{ギャップ } \varepsilon \text{ を横切るカイラルエッジモードの数}).}$$

平衡系の「Chern 数 = エッジモードの数」に代わる関係である．

なぜエッジモードを数えるか（スケッチ）

バルクで $U(T) = 1$ となるループを考える．端のある帯状の系では，1 周期の発展はバルクでは恒等で，端の近くだけで非自明になる：$U_{\mathrm{strip}}(k,T) \simeq 1 \oplus U_{\mathrm{edge}}(k)$．端の擬エネルギーを $\varepsilon_j(k)$ とすると

$$n = \sum_j w_j = \frac{T}{2\pi}\oint dk\,\partial_k \sum_j \varepsilon_j(k) = \frac{\mathrm{i}}{2\pi}\oint dk\,\partial_k \ln\det U_{\mathrm{edge}}(k).$$

前回の例 1 の巻き付き数 w の和であり，端の近くの状態が 1 周期に運ばれる正味の数である．これがバルクの量 $W[U]$ に等しいことが示せる．

Chern 数との関係

分岐をギャップ ε から，バンド α を一つ越えた上のギャップ ε' に動かすと，$H_F^{\varepsilon'} = H_F^{\varepsilon} + \Omega\, P_\alpha(\boldsymbol{k})$（$P_\alpha$ はバンド α への射影）．巻き戻しの部分に余分な因子が掛かる：

$$L_\alpha(\boldsymbol{k},t) = \mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}P_\alpha(\boldsymbol{k})\,t/T} = 1 + \big(\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}t/T} - 1\big)P_\alpha(\boldsymbol{k}), \qquad L_\alpha(0) = L_\alpha(T) = 1.$$

L_α を定義式に代入して t 積分を実行すると

$$W[L_\alpha] = \frac{\mathrm{i}}{2\pi}\int_{\mathrm{BZ}} d^2k\ \mathrm{Tr}\big(P_\alpha\,[\partial_{k_x}P_\alpha, \partial_{k_y}P_\alpha]\big) = C_\alpha.$$

射影から作ったループの巻き付き数は，バンドの Chern 数そのものである（符号は向きの規約で合わせる）．したがって

$$\boxed{W[U_{\varepsilon'}] - W[U_\varepsilon] = C_\alpha.}$$

前回の $C = n_{\text{上のギャップ}} - n_{\text{下のギャップ}}$ が導かれた．2 バンドなら $C_{\text{上}} = W_\pi - W_0$．

- 平衡系：$U = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}Ht}$ で，最低バンドの下に分岐を置けば U_ε は自明なループになり $W = 0$．平衡系の数え方が再現される．
- RLBL 模型（完全移動）：$U(\boldsymbol{k},T) = 1$ なので U 自体がループで，$W[U] = 1$．すべてのバンドで $C = 0$，すべてのギャップで $n = 1$．

- RLBL 模型（一般の $\theta = JT/4$）：$\theta < \pi/4$ で $W_\pi = 0$，$\pi/4 < \theta < 3\pi/4$ で $W_\pi = 1$．π ギャップが閉じる $\theta = \pi/4$（$\Omega = W_{\mathrm{band}}$．巻き付き数と区別するため，この回ではバンド幅を W_{band} と書く）で W_π が跳ぶ．不変量が変わるのはギャップが閉じるときだけである．

Chern 数は「隣り合うギャップの W の差」．絶対値 W_ε はミクロモーションが決める．$W_0 = W_\pi \neq 0$ が異常相である．

5.3　ループ分解と分類

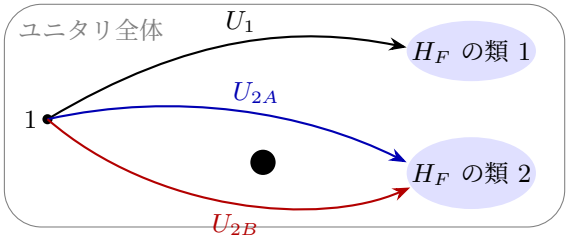
〔15 分〕

定理

（Roy–Harper 2017）ギャップを保ったまま，任意の発展を次の形に連続変形できる（分解は一意）：

$$U \;\simeq\; L * C \qquad \begin{cases} L: \text{ ユニタリループ } (L(0) = L(T) = 1) \\ C: \text{ 時間に依らない } H_F \text{ による発展} \end{cases}$$

先にループ L を行い，続けて一定の H_F で発展する．



黒丸：π ギャップが閉じる所

U_{2A} と U_{2B}：同じ H_F の類に着くが，黒丸をまたがないと移り合えない

$\Rightarrow$ ループの類が違う

$$\boxed{\text{フロッケ相} \;=\; \big(H_F \text{ の静的なトポロジー}\big) \times \big(\text{ループ } L \text{ のホモトピー類}\big)}$$

- L が自明：平衡系と同じ物理が H_F で実現している（第 3 回のフロッケ Chern 絶縁体）．
- L が非自明：駆動系に固有の相（異常相）．RLBL 模型は「H_F は自明，L が非自明」の純粋な例である．

分類

ループの分類は，同じ対称クラス・同じ次元の**静的なトポロジカル絶縁体の分類群 G と同じ**になる．結果として

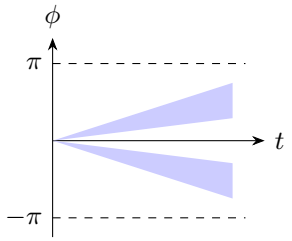
対称クラス	次元	静的な分類	周期駆動系
A（対称性なし）	2	$\mathbb{Z}$（Chern 数）	$\mathbb{Z}^N$：ギャップごとに W（2 バンドなら (W_0, W_π)）
AIII, BDI（カイラル）	1	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$：$(\nu_0, \nu_\pi)$
D（超伝導）	1	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$：0 と π の Majorana
AII（時間反転）	2, 3	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2^N$

N はバンド数．粒子正孔・カイラル対称性があるクラスでは，意味のあるギャップは 0 と π の二つだけなので $G \times G$ になる（前回見たように，$\varepsilon \leftrightarrow -\varepsilon$ で自分自身に移る点がこの二つだから）．前回の例 2（駆動 SSH 鎖）は 2 行目，例 3（RLBL）は 1 行目に入る．

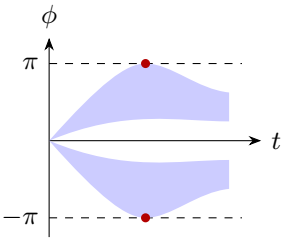
位相バンドによる見方

［省略可］　$U(\boldsymbol{k}, t)$ の瞬時固有値 $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\phi_n(\boldsymbol{k},t)}$ を $(\boldsymbol{k}, t)$ の関数として描く．静的な系では $\phi_n = E_n(\boldsymbol{k})t$ で，平らな面が広がるだけ．周期駆動系では，隣の位相ゾーンのバンドと $\phi = \pi$ で接する点（Weyl

点型の特異点，電荷 q_i）が現れうる．これは摂動で消せず，$W_\pi = \sum_i q_i$ となる（Nathan–Rudner 2015）．



静的：面が開いていくだけ



駆動系：$\phi = \pi$ で接する点（赤）

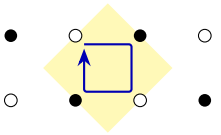
5.4　バルクで見える量：ミクロモーションの面積　〔20 分〕

Chern 絶縁体にはバルクの量子化応答 $\sigma_{xy} = Ce^2/h$ がある．異常相では $C = 0$ である．バルクには何が見えるか．

RLBL 模型で数える

1 サイトに置いた粒子は，1 周期に面積 $A = a^2$ のプラケットを一周する．単位胞（2 サイト）の面積は $A_u = 2a^2$ なので

$$\frac{2A}{A_u} = 1 = W.$$


青：1 周期の軌道，面積 $A = a^2$

黄：単位胞（2 サイト），面積 $A_u = 2a^2$

第 2 回で見たように，面積 A を周期 T で囲む粒子の軌道磁気モーメントは A/T である．全サイトを満たすと，粒子密度 $2/A_u$ を掛けて，時間平均の軌道磁化密度は

$$\bar{m} = \frac{2}{A_u} \cdot \frac{A}{T} = \frac{1}{T}.$$

一般の関係

- 1 サイトに局在した粒子の重心 $\boldsymbol{r}(t) = \mathrm{i}\dfrac{A_u}{4\pi^2}\displaystyle\int_{\mathrm{BZ}} d^2k\ \langle 0|U^{-1}\nabla_{\boldsymbol{k}}U|0\rangle$ が 1 周期に囲む面積を A とする．ミクロモーションに分散がない点では厳密に（Asteria ら 2026）

$$\boxed{W_0 = W_\pi = \frac{2A}{A_u}.}$$

  ここで面積は $A = \frac{1}{2}\int_0^T dt\,(\boldsymbol{r} \times \dot{\boldsymbol{r}})_z$．速度 $\dot{\boldsymbol{r}}$ には通常の群速度は効かず（BZ 積分で消える），異常速度だけが寄与する．
- 分散のある一般の場合は $W = 2A/A_u +$ (巻き戻しの寄与) + (位置と速度の相関) で，A は量子化しない．それでも数値計算では，$2A/A_u$ は異常相 $(W_0, W_\pi) = (1, 1)$ の中でだけ 1 程度になり，Haldane 型の相 $(1, 0)$ では小さい（ミクロモーションがほとんどない）．
- 1 サイトから出発する実空間の測定なので，乱れた系や不均一な系でも局所的に使える．

- 満たした系の時間平均軌道磁化密度は $\bar{m} = W/T$ に量子化する（Nathan ら 2017）．上の関係に粒子密度を掛けたものである．

	Chern 絶縁体	異常フロッケ絶縁体
不変量	C（バンドごと）	$W_0 = W_\pi$（ギャップごと）
エッジ	C 本のカイラルモード	W 本のカイラルモード（全ギャップ）
バルクの量	$\sigma_{xy} = Ce^2/h$	ミクロモーション面積 $2A/A_u$，軌道磁化 W/T
情報の在処	H_F	$P(t)$（ループ L）

第 2 回の自由電子では，円偏光下のミクロモーションの面積 $\pi\rho^2$ は連続的な量だった．格子上で分散のない点では，それが $A_u/2$ を単位に量子化し，トポロジカル不変量になる．より大きな閉路を描く駆動で，大きな巻き付き数（$W = 4, 6$ の例がある）も作れる．

5.5　乱れと相互作用　〔10 分〕

異常フロッケ Anderson 絶縁体

（Titum ら 2016）RLBL 模型に乱れを加えると，バルクの Floquet 状態を**すべて**局在させたまま，カイラルエッジ状態を残せる．平衡系では不可能である（Chern 数が 0 でないバンドには必ず広がった状態がある）．一方の端のモードをすべて占有すると，1 周期あたり W 個の粒子が運ばれる（量子化された非断熱ポンプ）．乱れをさらに強くすると，自明な局在相に転移する．ミクロモーションの面積は弱い乱れでは大きいまま保たれ，自明な局在相で 0 に落ちる．

相互作用

相互作用があると，第 3 回で見た加熱の問題が現れる．フロッケ相を「相」として定義するには，加熱を止める仕組みが要る．

- 多体局在（MBL）：強い乱れで熱化を止める．この設定で，1 体の異常相の多体版（カイラル・フロッケ相）や，離散時間結晶が定義される．
- プレサーマル領域：$\tau_{\mathrm{heat}} \sim \mathrm{e}^{O(\Omega/J)}$ より短い時間で準安定な相として実現する．

カイラル・フロッケ相では，端のユニタリ発展が量子情報を一方向に運ぶ．その量は離散的な指数（カイラルユニタリ指数）で特徴づけられる（Po ら 2016）．

離散時間結晶

駆動は周期 T なのに，物理量が周期 $2T$ で応答し，それが摂動に対して安定な相（離散時間並進対称性の自発的破れ）．最小模型は，多体局在した Ising 鎖に 1 周期ごとに π パルス（全スピン反転）を加えたもの．多体の擬エネルギー準位が $(\varepsilon, \varepsilon + \Omega/2)$ の対をなす．前回の π モードの多体版である（Khemani ら，Else ら 2016）．

5.6　実験　〔5 分〕

舞台	実現方法	観測	文献
光導波路	伝搬方向を時間とみなす．導波路を順に近づけて RLBL 型の駆動	$C=0$ でのカイラルエッジ伝搬	Maczewsky ら，Mukherjee ら 2017
冷却原子	ハニカム光格子の強度を 3 方向で順に変調	ギャップの開閉と Berry 曲率から W_0, W_π	Wintersperger ら 2020
固体	強い中赤外光	フロッケ・ブロッホバンド，光誘起異常 Hall 効果	TI 表面 2013，グラフェン 2020, 2025

固体での異常相は未実現である．$\Omega \lesssim W_{\mathrm{band}}$ の強い駆動が要り，加熱と電子の占有が障害になる．

5.7　板書 4 回のまとめ　〔5 分〕

$$U(\boldsymbol{k},t) = P(\boldsymbol{k},t)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}H_F(\boldsymbol{k})t}$$

	擬エネルギー BZ の中心（第 3 回）	BZ の境界（第 4, 5 回）
条件	$\Omega \gg W_{\mathrm{band}}$	$\Omega \lesssim W_{\mathrm{band}}$，共鳴
主役	H_F（H_{eff}）	$P(t)$（ループ L）
手法	高周波展開	巻き付き数，ループ分解
不変量	Chern 数	W_0, W_π
バルクの量	σ_{xy}	ミクロモーションの面積，軌道磁化
例	フロッケ Chern 絶縁体	π モード，RLBL 模型
実験	冷却原子，グラフェン	光導波路，冷却原子

残る問題は「どの Floquet 状態が占有されるか」と「加熱」である．どちらも孤立系の理論の外にあり，環境・測定・フィードバックを含めた量子制御の話になる（第 6 回）．