フロッケ理論と量子物質の制御

横浜国大 集中講義 板書ノート

岡 隆史

6　現実の物質でのフロッケ・エンジニアリング：多体系・占有・観測

ここまでの 4 回は，相互作用のない孤立系の理論だった．現実の物質に適用するには，四つの問いに答える必要がある．(1) 電子間相互作用があるとどうなるか．(2) どの Floquet 状態が占有されるか．(3) 何を測れば Floquet 状態が見えるか．(4) 周波数が低く電場が強いとき，何が起こるか．順に扱う．

6.1　強相関系：駆動された Hubbard 模型　〔30 分〕

模型

$$H(t) = -J\sum_{\langle ij\rangle\sigma} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}A_{ij}(t)} c^\dagger_{i\sigma}c_{j\sigma} + U\sum_i n_{i\uparrow}n_{i\downarrow}, \qquad A_{ij}(t) = A_{ij}\cos(\Omega t - \varphi_{ij}).$$

半充填，$U \gg J$（Mott 絶縁体）を考える．A_{ij} はボンドに沿った電場の成分で決まる Peierls 位相である．

復習：外場がないとき

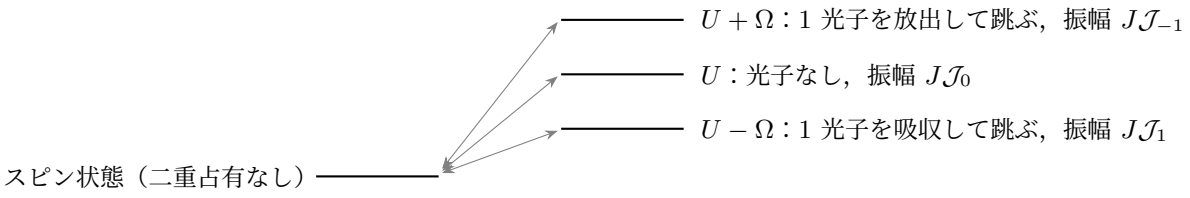
$J = 0$ では各サイトに電子が 1 個ずつ．スピンの向きは自由で，2^N 重に縮退している．J の 2 次で，隣に跳んで二重占有（エネルギー U）を作り，戻ってくる仮想過程が縮退を解く：

$$H_{\mathrm{spin}} = J_{\mathrm{ex}}\sum_{\langle ij\rangle}\Big(\boldsymbol{S}_i\cdot\boldsymbol{S}_j - \frac{1}{4}\Big), \qquad J_{\mathrm{ex}} = \frac{4J^2}{U}.$$

Pauli 原理により，跳べるのはスピンが反平行のときだけ．だから反強磁性的になる．

外場があると

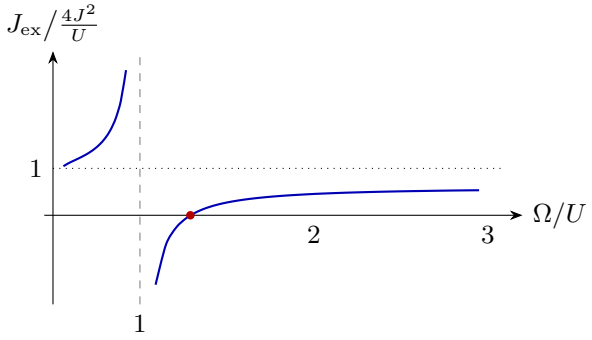
Peierls 位相を Fourier 展開すると，「n 光子を吸収しながら跳ぶ」過程の振幅は $J\mathcal{J}_n(A)$（位相因子を除く）である．Sambe 空間では，仮想状態（二重占有があり，光子を n 個吸収した状態）のエネルギーが $U - n\Omega$ になる：



すべての n について 2 次摂動を足すと（Mentink ら 2015）

$$\boxed{J_{\mathrm{ex}}(A,\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{4J^2\,\mathcal{J}_n(A)^2}{U - n\Omega}.}$$

- $A \to 0$：$n=0$ だけが残り $4J^2/U$.
- $\Omega \gg U$：n と $-n$ の項がほぼ打ち消し，$J_{\rm ex} \simeq 4J^2\mathcal{J}_0(A)^2/U$．ホッピングの抑制（動的局在）がそのまま現れる．
- $\Omega < U$：$n=1$ の項 $1/(U-\Omega)$ が正で大きい．反強磁性が強まる．
- Ω が U のすぐ上：$n=1$ の項が負で大きい．$J_{\rm ex} < 0$ にできる：**交換相互作用の符号を光で反転**（強磁性的）．
- $|U - n\Omega| \lesssim J$：共鳴．二重占有が**実際に**作られ，スピン模型の描像が壊れる．エネルギー分母の発散は加熱の現れである（第 3 回と同じ構造）．



$A=1$ の場合（上の式を数値的に評価）

$\Omega < U$：増強．$\Omega \to U$ で発散（共鳴）

$U < \Omega < 1.29\,U$：$J_{\rm ex} < 0$

$\Omega \to \infty$：$\mathcal{J}_0(1)^2 = 0.59$ に近づく

大きさと使える窓

$A = eEa/\hbar\Omega$．格子定数 $a = 4\,\text{Å}$，$\hbar\Omega = 1\,\text{eV}$ のとき，$A=1$ は $E \approx 25\,\text{MV/cm}$ に当たる．強いパルス光で到達できる領域である．加熱（二重占有の生成）が遅いのは，(a) Ω が U より十分大きいとき（複数の二重占有を同時に作る必要がある），(b) Ω が Mott ギャップより小さいとき（中赤外光）である．

方法：Floquet–Schrieffer–Wolff 変換

時間に依存する正準変換 $H' = \mathrm{e}^{\mathrm{i}S(t)} H \mathrm{e}^{-\mathrm{i}S(t)} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}S(t)} \mathrm{i}\partial_t \mathrm{e}^{-\mathrm{i}S(t)}$ で，二重占有の数を変える項を J の次数ごとに消していく．1 次では，二重占有を d だけ変える成分について $\partial_t S_d^{(1)} = -\mathrm{i}dU\, S_d^{(1)} + T_d(t)$ を周期解として解く．第 3 回の例 3（共鳴があるときは先に回転系に移る）を多体系で行っていることに当たる．

円偏光：新しい相互作用

円偏光は時間反転対称性を破る．展開を J の 4 次まで進めると，外場がなければ存在しない項が現れる：

$$\delta H_{\rm eff} = \sum_{ijk} J_\chi\, \boldsymbol{S}_i \cdot (\boldsymbol{S}_j \times \boldsymbol{S}_k), \qquad J_\chi \propto \frac{J^4\,\Omega}{U^6}\, \mathcal{A}_{ijk}\, \mathrm{i}(\boldsymbol{E}^* \times \boldsymbol{E})_z \quad (\Omega \ll U).$$

$\mathcal{A}_{ijk}$ は三角形 ijk の面積．$\boldsymbol{S}_i \cdot (\boldsymbol{S}_j \times \boldsymbol{S}_k)$ はスカラースピンカイラリティである．

- 符号は円偏光の向きで反転し，直線偏光では 0．円偏光は，スカラーカイラリティに共役な「場」として働く（磁場がスピンに共役であるのと同じ）．
- カイラルスピン液体を光で誘起する提案につながる（Claassen ら 2017，Kitamura ら 2017）．第 3 回の「円偏光 → Haldane 質量」の強相関版である．
- 同じ枠組みで，η ペアリングや $d + \mathrm{i}d$ 型のトポロジカル超伝導の誘起も議論されている．

6.2 どの Floquet 状態が占有されるか 〔25 分〕

問題

平衡系では「エネルギーの低い状態から詰める」．しかし擬エネルギーは Ω を法としてしか決まらず，**高低の順序がない**．Floquet 系には基底状態という概念がない．占有は別の原理で決まる．

孤立系（相互作用なし）

占有 $f_\alpha = \langle \psi_\alpha^\dagger \psi_\alpha \rangle$ は時間発展で保存する．初期状態と外場の入れ方で決まる．

- 突然入れる：$f_\alpha = \sum_\beta f(E_\beta) \left| \langle \beta | u_\alpha(t_0) \rangle \right|^2$（$|\beta\rangle$ は外場のないときの固有状態，f は Fermi 分布）．
- ゆっくり入れる：元のバンドの占有が，連続的につながる Floquet バンドに引き継がれる．ただし共鳴条件 $E_+(\boldsymbol{k}) - E_-(\boldsymbol{k}) = n\Omega$ を満たす $\boldsymbol{k}$ では準位が交差し，そこで占有が混ざる．

熱浴につながった系

各サイトが，広いバンドをもつフェルミオンの熱浴（温度 T）とトンネル結合しているとする：

$$H_{\rm tot} = \sum_{\alpha\beta} \langle \alpha | H_{\rm sys}(t) | \beta \rangle \, c_\alpha^\dagger c_\beta + \sum_{p\alpha} \left(V_p c_\alpha^\dagger b_{\alpha p} + \text{h.c.} \right) + \sum_{p\alpha} \omega_p b_{\alpha p}^\dagger b_{\alpha p}.$$

全体が 2 次形式なので，Heisenberg 方程式は線形で解ける．熱浴 b を消去すると，系の演算子は

$$\mathrm{i}\partial_t c_\alpha = \sum_\beta \langle \alpha | H_{\rm sys}(t) | \beta \rangle \, c_\beta - \mathrm{i}\Gamma c_\alpha + (\text{熱浴からの流入}), \qquad \Gamma = \pi \sum_p |V_p|^2 \delta(\omega - \omega_p)$$

に従う（Γ がエネルギーに依らない広帯域の極限）．Floquet 状態への射影 $\psi_\alpha(t) = \sum_\beta \langle \Psi_\alpha(t) | \beta \rangle \, c_\beta$ は $\mathrm{e}^{-\Gamma t}$ で減衰し，初期状態の記憶は時間 $1/\Gamma$ で消える．残るのは熱浴から流入した成分だけで，定常状態の占有（1 周期の平均）は

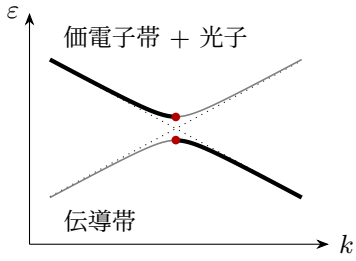
$$\bar{f}_\alpha = \sum_m \langle u_\alpha^m | u_\alpha^m \rangle \int \frac{d\omega}{2\pi} \, \frac{2\Gamma}{\omega^2 + \Gamma^2} \, f(\omega + \varepsilon_\alpha + m\Omega)$$

となる．結合が弱い極限では

$$\boxed{\bar{f}_\alpha = \sum_m \langle u_\alpha^m | u_\alpha^m \rangle \;\; f(\varepsilon_\alpha + m\Omega) \qquad (\Gamma \to 0).}$$

読み方：Floquet 状態 α は，エネルギー $\varepsilon_\alpha + m\Omega$ の成分を重み $\langle u_\alpha^m | u_\alpha^m \rangle$ でもつ（重みの和は 1）．熱浴の電子はエネルギーを保存してトンネルするので，各成分が，そのエネルギーでの Fermi 分布に従って満たされる．

- 高周波・弱い駆動：$m = 0$ の成分が主で $\bar{f}_\alpha \simeq f(\varepsilon_\alpha)$．$H_{\rm eff}$ の平衡分布に近い．
- 共鳴：伝導帯（$m = 0$ の成分）と，1 光子を吸収した価電子帯（$m = -1$ の成分，エネルギー $\varepsilon_\alpha - \Omega$）が混ざった Floquet 状態では，二つの成分がほぼ等しい重みをもち $\bar{f} \simeq 1/2$．「高温」のような分布になる．



太線：満ちている（価電子帯の性格）
細線：空（伝導帯の性格）
赤点（共鳴）：$\bar{f} \simeq 1/2$
占有は一本の Floquet バンドに沿って入れ替わる

ボゾンの熱浴（フォノンなど）

Floquet 状態の間の遷移率は, 黄金律の Floquet 版で与えられる. エネルギー保存は $\varepsilon_\alpha - \varepsilon_\beta + m\Omega = \omega_{\text{phonon}}$ で，$m \neq 0$ の過程（光子を吸収しながらフォノンを出す）が詳細釣り合いを破り，系を加熱する．定常分布は熱浴の種類と結合の仕方に依存し，普遍的な答えはない.

帰結

- フロッケ Chern 絶縁体の Hall 伝導度 $\sigma_{xy} = \frac{e^2}{h} \int \frac{d^2k}{2\pi} \sum_\alpha \bar{f}_\alpha \mathcal{F}_\alpha$ は，一般には量子化しない．共鳴の輪の上で占有が入れ替わるからである.
- 相互作用する孤立系では，$t \ll \tau_{\text{heat}}$ の間は H_{eff} の Gibbs 状態（プレサーマル状態），その後は無限温度（第 3 回）.

占有は H_F だけでは決まらない．同じ Floquet バンドでも，熱浴へのつなぎ方で物性が変わる．環境まで含めて設計する必要がある.

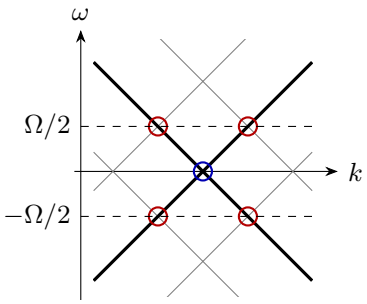
6.3　観測

〔10 分〕

時間分解 ARPES

ポンプ光で駆動し，その最中にプローブ光で光電子を出す．エネルギーと波数を分解した占有が測れる．概略は

$$I(\boldsymbol{k}, \omega) \;\propto\; \sum_\alpha \sum_m \langle u_\alpha^m(\boldsymbol{k}) | u_\alpha^m(\boldsymbol{k}) \rangle \; f_\alpha(\boldsymbol{k}) \; \delta\big(\omega - \varepsilon_\alpha(\boldsymbol{k}) - m\Omega\big).$$



太線：元の Dirac バンド（$m = 0$）
細線：レプリカ（$m = \pm 1$），強度 $\propto A^2$
青丸：$\omega = 0$ のギャップ（円偏光，第 3 回）
赤丸：$\omega = \pm\Omega/2$ のギャップ（共鳴，第 4 回）

- 元のバンドの上下 $\pm\Omega, \pm 2\Omega, \ldots$ に**レプリカ（サイドバンド）**が現れる．強度は Sambe 成分の重み $\langle u^m | u^m \rangle$（弱い駆動では $A^{2|m|}$ に比例）．第 2 回の Sambe 空間のスペクトルが，重みつきで直接見える.
- 注意：光電子の終状態も光で「着衣」され，それだけでサイドバンドができる（Volkov 状態）．固体中の Floquet–Bloch 状態の証拠になるのは，レプリカ同士が交差する点での**ギャップ**（混成）と，その偏光依存性である.

- 実験：トポロジカル絶縁体 Bi_2Se_3 の表面（Wang ら 2013，Mahmood ら 2016），グラフェン（2025）．

パルスであること

実験の外場は有限の長さのパルスである．包絡線の変化が周期 T より十分ゆっくりなら，各時刻でその瞬間の振幅に対する Floquet 状態が実現している（第 2 回の「ゆっくり入れる」）．Floquet 状態と呼べるには，少なくとも数周期は必要である．

輸送と光学応答

- 光誘起異常 Hall 効果（McIver ら 2020）：グラフェンに中赤外の円偏光パルスを当て，その最中の Hall 電流を超高速回路で検出．符号は円偏光の向きで反転する．大きさはバンドのトポロジーと占有の両方で決まる（前節）．
- 偏光回転（Kerr・Faraday 効果）：σ_{xy} が e^2/h 程度なら回転角は数 mrad.
- 円二色性：光誘起のスカラーカイラリティ項は，逆に，スピンカイラリティを円二色性で読み出す原理にもなる．

6.4　低周波・強電場の極限：トンネル描像　〔20 分〕

周波数を下げ続けると

電場の振幅 $F_0 = \Omega A$ を固定して $\Omega \to 0$ とすると $A \to \infty$．ギャップ Δ を越えるのに要る光子数 Δ/Ω も発散する．少数の光子で考える Floquet 描像は不便になり，準静的な描像が自然になる：波数が $k(t) = k + A(t)$ とゆっくり掃引され，ギャップの最小点を通るたびに Landau–Zener トンネルが起こる．

Landau–Zener の公式

$H = vk\,\sigma_x + \frac{\Delta}{2}\sigma_z$，$\dot{k} = F$ のとき，上の準位へ移る確率は

$$\boxed{P = \exp\Big(-\frac{\pi\Delta^2}{4vF}\Big) = \exp\Big(-\frac{\pi\Delta}{2\xi F}\Big), \qquad \xi = \frac{2v}{\Delta}.}$$

F について $\mathrm{e}^{-1/F}$ の形で，摂動展開のどの次数にも現れない（非摂動効果）．ξ は，基底状態に量子ゆらぎとして含まれる粒子・正孔対の大きさである．

交流電場への拡張

断熱的に変化する 2 準位系の遷移確率は，準位差 $\Delta E(t) = E_+(t) - E_-(t)$ を複素時間に解析接続して

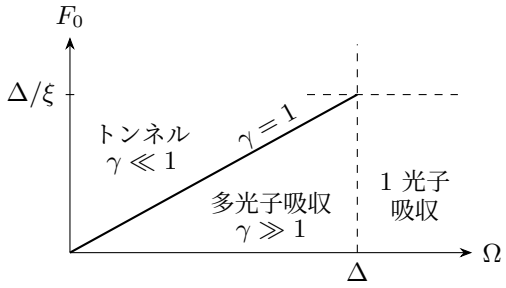
$$P \simeq \exp\Big[-2\,\mathrm{Im}\int_0^{t_c} dt\,\Delta E(t)\Big], \qquad \Delta E(t_c) = 0$$

と書ける（Landau–Dykhne の公式）．直流では $\Delta E = 2\sqrt{(vFt)^2 + \Delta^2/4}$，$t_c = \mathrm{i}\Delta/2vF$ で，上の結果を再現する．交流電場 $k(t) = (F_0/\Omega)\sin\Omega t$ では $t_c = \mathrm{i}\tau_c$ として

$$\boxed{\sinh\Omega\tau_c = \gamma, \qquad \gamma \equiv \frac{\Omega}{F_0\,\xi} \qquad (\text{Keldysh パラメータ}).}$$

- $\gamma \ll 1$：$\tau_c \simeq 1/F_0\xi$（トンネルにかかる時間）．その間，電場は変化しない．直流の公式に帰着する．
- $\gamma \gg 1$：$\tau_c \simeq \ln(2\gamma)/\Omega$．指数は $(2\Delta/\Omega)\ln 2\gamma$ となり $P \sim (2\gamma)^{-2\Delta/\Omega} \propto F_0^{2n}$，$n = \Delta/\Omega$：$n$ 光子吸収．

一つの式が，トンネルと多光子吸収を連続的につなぐ．$\gamma = \Omega\times$（トンネルにかかる時間）である．



$\gamma \gg 1$：$P \sim (F_0\xi/2\Omega)^{2\Delta/\Omega}$（冪，摂動的）

$\gamma \ll 1$：$P \sim \exp(-\pi\Delta/2\xi F_0)$（非摂動的）

二つは連続的につながる（Keldysh 1965）

$F_0 \sim \Delta/\xi$：Schwinger 限界

Mott 絶縁体

同じ構造が強相関系でも成り立つ．Δ を Mott ギャップ，ξ を二重占有・正孔対の相関長と読み替えればよい（1 次元 Hubbard 模型では厳密解から示せる）．強電場による絶縁破壊は，真空から電子・陽電子対が生まれる Schwinger 機構の固体版である．短いパルスを使って電子なだれを抑えた実験で，トンネル型の式が確かめられている．しきい電場 Δ/ξ は，$\Delta = 1\,\mathrm{eV}$，$\xi = 1\,\mathrm{nm}$ なら $10\,\mathrm{MV/cm}$．真空の Schwinger 限界（$1.3\times10^{16}\,\mathrm{V/cm}$）より 9 桁小さく，実験室で到達できる．

ギャップより低い周波数での駆動は，励起が少なくフロッケ・エンジニアリングに適している．ただし H_{eff} の変化（$\propto A^2$）を大きくしようと電場を強めると，多光子吸収・トンネルによる励起が増える．使える窓は γ と τ_{heat} で決まる．

6.5　まとめと展望

〔5 分〕

問い	道具	要点
相互作用	Floquet–Schrieffer–Wolff 変換	$J_{\mathrm{ex}}(A,\Omega)$，光誘起カイラリティ．共鳴は加熱
占有	熱浴を含む定常状態	$\bar{f}_\alpha = \sum_m \langle u_\alpha^m \vert u_\alpha^m\rangle\, f(\varepsilon_\alpha + m\Omega)$．普遍的でない
観測	時間分解 ARPES，Hall，Kerr	サイドバンドの強度 = Sambe 成分の重み
低周波・強電場	Landau–Zener，Keldysh	$\gamma = \Omega/F_0\xi$：多光子 $\leftrightarrow$ トンネル

講義全体の地図

	1 体	多体
BZ の中心（有効ハミルトニアン）	フロッケ・トポロジカル絶縁体，人工ゲージ場（第 3 回）	交換相互作用の制御，カイラルスピン液体，超伝導（第 6 回）
BZ の境界・共鳴	異常フロッケ絶縁体，π モード（第 4, 5 回）	カイラル・フロッケ相，時間結晶（第 5 回）
占有・加熱	熱浴につながった系の分布（第 6 回）	プレサーマル化と加熱（第 3, 6 回）
低周波・強電場	Landau–Zener トンネル（第 6 回）	Mott 絶縁体の絶縁破壊（第 6 回）

展望：時間だけでなく空間にも変調した駆動（進行波，表面弾性波）による時空結晶．光を量子化した共振器中の物質．測定とフィードバックによる制御．これらを含む「非平衡量子制御」の全体像は談話会で述べる．